Recasages possibles : 206, 214, 215, 219.
Référence : Petit guide de calcul différentiel, Rouvière (p. 384-386).

Développement

Théorème 1 Sur un billard elliptique, il existe une trajectoire fermée à 3 rebonds.

Remarque : Ce développement nécessite l'appui d'un dessin durant tout son exposé.

- *Étape 1* : Modélisons mathématiquement le problème. On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique. On représente le billard par une ellipse E d'équation $g(x,y)=0$, où

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1, \end{array} \right.$$

avec a,b deux réels strictement positifs quelconques. L'idée est donc de trouver un triangle ABC inscrit dans E tel que si une boule de billard se trouve sur un côté du dit triangle et qu'elle rebondit sur le bord elliptique, alors elle continuera son chemin sur le côté suivant du triangle. À l'instar des lois de Descartes, un tel rebond est possible si, par exemple en se plaçant au point A, la droite (AB) est la symétrique de la droite (CA) par rapport à la tangente à E en A. L'idée de ce problème d'existence est de montrer tout d'abord qu'il existe un triangle inscrit dans E de périmètre maximal, puis de vérifier qu'un tel triangle vérifie toujours la condition de rebond. On se servira notamment du théorème des extrema liés.

- *Étape 2* : On commence par montrer que E est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1. Pour cela, remarquons que $E=g^{-1}(\{0\})$. Il suffit donc de montrer que g est une submersion au voisinage de E. Comme g est polynômiale en x et y, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc en particulier de classe $\mathcal{C}^1$. Comme g est à valeurs dans $\mathbb{R}$, g est une submersion en $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\nabla_{(x,y)}g\neq 0$. Or, on a

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \nabla_{(x,y)}g=\begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, dès que $(x,y)\neq(0,0)$, on voit que $\nabla_{(x,y)}g\neq 0$ donc g est une submersion sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, et en particulier au voisinage de E. Ainsi, E est bien une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, de dimension $2-1=1$. De plus, E est compacte. En effet, $E=g^{-1}(\{0\})$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue. De plus, on a $E\subset\overline{D\big(0,\max(a,b)\big)}$ car si par exemple $a\leqslant b$,

$$(x,y)\in E\Rightarrow x^2+y^2=b^2\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\leqslant b^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=b^2.$$

Ainsi, E est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ donc est compact.

- *Étape 3* : On introduit l'application *périmètre* suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B,C) & \longmapsto & AB+BC+CA=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|+\left\|\overrightarrow{BC}\right\|+\left\|\overrightarrow{CA}\right\|. \end{array} \right.$$

Comme produit de compacts, la partie E^3 de $(\mathbb{R}^2)^3\simeq\mathbb{R}^6$ est compacte. Ainsi, l'application f, étant continue sur E^3 (car elle l'est sur $\mathbb{R}^6$) admet un maximum sur E^3, atteint en (A_0,B_0,C_0). Notons que A_0,B_0,C_0 sont nécessairement deux à deux distincts car pour tous $A,B,C\in E$ deux à deux distincts,

$$AC+CA<AB+BC+CA$$

par l'inégalité triangulaire. Ainsi, on peut restreindre f à l'ouvert U de $\mathbb{R}^6$ constitué des triplets de points deux à deux distincts. On note encore f cette restriction et on peut déjà remarquer que $f\in\mathcal{C}^1(U)$ car la norme est $\mathcal{C}^1$ en dehors de 0.

À nouveau par produit, E^3 est une sous-variété différentiable de dimension 3 de $\mathbb{R}^6$. En effet, si l'on considère l'application

$$G : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^6 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (A,B,C) & \longmapsto & \big(g(A),g(B),g(C)\big), \end{array} \right.$$

alors d'une part G est une submersion au voisinage de E^3 car sa jacobienne en $(A,B,C)\in\mathbb{R}^6$ est

$$J_{(A,B,C)}G=\begin{pmatrix} J_Ag & 0 & 0 \\ 0 & J_Bg & 0 \\ 0 & 0 & J_Cg \end{pmatrix},$$

qui est clairement de rang maximal au voisinage de E^3 (car g est une submersion au voisinage de E). D'autre part, $G^{-1}\big((\{(0,0,0)\}\big)=g^{-1}(\{0\})^3=E^3$, donc E^3

est bien une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^6$ de dimension $6-3=3$. Par ailleurs, l'espace tangent à E^3 en $(A,B,C) \in E^3$ est donné par

$$T_{(A,B,C)}E^3 = T_A E \times T_B E \times T_C E.$$

Ainsi, comme $f_{|E^3}$ admet un maximum en $(A_0,B_0,C_0) \in E^3$, d'après le théorème des extrema liés,

$$\forall (a,b,c) \in T_{A_0}E \times T_{B_0}E \times T_{C_0}E,\ d_{(A_0,B_0,C_0)}f(a,b,c) = 0.$$

- *Étape 4* : Calculons plus explicitement $d_{(A,B,C)}f$ pour $(A,B,C) \in U$. On considère l'application

$$s : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \right\rangle. \end{array} \right.$$

On a pour tous $a,b \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} s(A+a,B+b) &= \langle B+b-(A+a), B+b-(A+a) \rangle \\ &= \langle B-A, B-A \rangle + 2\langle B-A, b-a \rangle + \langle b-a, b-a \rangle \\ &= s(A,B) + 2\left\langle \overrightarrow{AB}, b-a \right\rangle + o\big(\|(a,b)\|\big) \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall (A,B),(a,b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ d_{(A,B)}s(a,b) = 2\left\langle \overrightarrow{AB}, b-a \right\rangle$. On considère alors l'application différentiable $r = \sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, de différentielle donnée par $d_x r(h) = \frac{1}{2\sqrt{x}}h$ pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*, h \in \mathbb{R}$. Par la règle de dérivation des fonctions composées, on obtient $\forall A \neq B \in \mathbb{R}^2, \forall a,b \in \mathbb{R}^2$,

$$d_{(A,B)}(r \circ s)(a,b) = \big(d_{s(A,B)}r \circ d_{(A,B)}s\big)(a,b) = \frac{2\left\langle \overrightarrow{AB}, b-a \right\rangle}{2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}.$$

En particulier, en notant $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{A_0B_0}}{A_0B_0}$ le vecteur unitaire portant le côté $[A_0B_0]$, on a

$$\forall a,b \in \mathbb{R}^2,\ d_{(A_0,B_0)}(r \circ s)(a,b) = \langle \overrightarrow{u}, b-a \rangle.$$

Ainsi, si l'on note de même $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{B_0C_0}}{B_0C_0}$ et $\overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{C_0A_0}}{C_0A_0}$, on obtient pour tous $(a,b,c) \in T_{A_0}E \times T_{B_0}E \times T_{C_0}E$,

$$\langle \overrightarrow{u}, b-a \rangle + \langle \overrightarrow{v}, c-b \rangle + \langle \overrightarrow{w}, a-c \rangle = 0$$

$$i.e\ \langle \overrightarrow{w} - \overrightarrow{u}, a \rangle + \langle \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, b \rangle + \langle \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, c \rangle = 0.$$

En particulier, en $b,c=0$ (qui est bien dans $T_{B_0}E \cap T_{C_0}E$), on obtient

$$\langle \overrightarrow{w} - \overrightarrow{u}, a \rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ \langle \overrightarrow{w}, a \rangle = \langle \overrightarrow{u}, a \rangle.$$

Ceci signifie que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$, qui dirigent les droites (A_0B_0) et (C_0A_0) respectivement, ont même projeté sur la droite tangente à E en A_0, ou encore que les droites (A_0B_0) et (C_0A_0) sont symétriques par rapport à cette droite tangente. En procédant de même en B_0 et en C_0, on montre bien que le triangle $A_0B_0C_0$ est une trajectoire de billard fermée à trois rebonds. Ceci conclut la preuve du **Théorème 1**.